# Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Dreveton
Hirsch – Lacombe
Beck Malick Peyré
Gourdon
Isenmann-P. (dev)

On considère $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $f : X \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$.

## I – Existence et unicité d'extremums

### 1. Compacité et coercivité [Der]

**Théorème 1.1** Si $X$ est compact et $f$ est continue, alors $f$ est bornée et atteint ses bornes.

**Contre-exemples 1.2.**

$X$ non compact : $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x$ est continue et n'admet ni maximum ni minimum

$f$ non continue : $f : x \in [0,1] \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1/x \text{ sinon} \end{cases}$ n'admet pas de maximum

**Application 1.3** Soit $C$ un compact et $F$ un fermé de $E$ avec $F \cap C = \emptyset$ alors l'application $x \longmapsto d(x, F)$ réalise son infimum et on le note $d(C, F)$.

**Définition 1.4** Supposons que $X$ soit non borné, on dit que $f$ est coercive si elle vérifie

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

**Exemple 1.5**

L'application $\|.\|$ est coercive sur $E$

**Proposition 1.6** Si $E = \mathbb{R}^n$ et $f$ est coercive et continue, alors $f$ atteint son minimum.

← ajouter app° : $x \longmapsto \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$

### 2. Convexité [Der]

**Définition 1.7** L'ensemble $X$ est dit convexe si pour tout $t \in [0,1]$ et tous $x_1, x_2 \in X$, $tx_1 + (1-t)x_2 \in X$.

**Définition 1.8** Supposons $X$ convexe. Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $t \in [0,1]$ et tous $x_1, x_2 \in X$, $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_2) + (1-t)f(x_2)$

On dit que $f$ est strictement convexe si l'inégalité est stricte pour $x_1 \neq x_2$ et $t \in ]0,1[$.

**Théorème 1.9** Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors tout minimum local est un minimum global.

**Contre-exemple 1.10**

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe mais n'admet pas de minimum

**Proposition 1.11** Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe, alors il existe au plus un point minimisant $f$.

**Lemme 1.12** Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note $E_S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t x S x \leqslant 1\}$, $\mu : A \longmapsto (\det A)^{-1/2}$ et $B$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Alors, $\mathrm{Vol}(E_S) = \mu(S)\,\mathrm{Vol}(B)$.

**Lemme 1.13** La fonction $\mu$ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**Théorème 1.14 (ellipsoïde de John – Loewner)** Soit $K$ un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en $0$, de volume minimal, et contenant $K$.

développement 2

### 3. Cadre hilbertien [Hir]

On considère $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert.

**Théorème – Définition 1.15** Soit $C$ une partie fermée convexe et non vide de $H$. Alors, pour tout point $x$ de $H$, il existe un unique point $y$ de $C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$.

Le point appelé projection de $x$ sur $C$ et noté $P_C(x)$, est caractérisé par la propriété : $y \in C$ et $\forall z \in C$, $\mathrm{Re}\langle x - y, z - y \rangle \leqslant 0$.

**Corollaire 1.16** Soit $F$ un sous-espace fermé de $H$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in H$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

En particulier, $H = F \oplus F^\perp$

**Application 1.17 (théorème de Riesz)** L'application $E \longrightarrow E', y \longmapsto \langle \cdot, y \rangle$ est une isométrie surjective.

**Théorème 1.18** Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue et coercive, alors il existe $a \in H$ tel que $f(a) = \inf_H f$.

développement 2

## II - Caractérisation et recherche d'extremums

### 1. Conditions du 1er ordre [BMP]

**Lemme 2.1** Supposons $X$ ouvert de $E$. Si $x_0$ est un minimum local et si $f$ est différentiable en $x_0$, alors $df(x_0) = 0$.

**Contre-exemples 2.2**

Réciproque fausse : $t \in \mathbb{R} \longmapsto t^3$ a une dérivée s'annulant en 0 mais n'admet pas de minimum local

$X$ non ouvert : $t \in [0,1] \longmapsto t$ admet un minimum mais sa dérivée ne s'annule pas

**Définition 2.3** Un point où la différentielle s'annule est appelé point critique.

### 2. Conditions du 2ème ordre [BMP]

**Lemme 2.4** Supposons $X$ ouvert. Soient $x_0 \in X$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable, telle que $df(x_0) = 0$. Alors :

- si $x_0$ est un minimum local de $f$, $d^2f(x_0)$ est positive.
- si $d^2f(x_0)$ est définie positive, $f$ admet un minimum local strict en $x_0$

**Contre-exemples 2.5**

$d^2f(a)$ positive, a pas minimum : $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 - y^3$

a minimum strict, $d^2f(a)$ pas définie positive : $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x^2 + y^4$

### 3. Optimisation sous contraintes [Gou]

**Théorème 2.6** Soient $f, g_1, \dots, g_n : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $C^1$ où $U$ est un ouvert. Soit $T := \{x \in U \mid \forall i \in [\![1, r]\!],\ g_i(x) = 0\}$.

Si $f|_T$ admet un extremum local en $x_0$ et si $dg_1(x_0), \dots, dg_r(x_0)$ sont linéairement indépendantes, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $df(x_0) = \sum_{i=1}^{r} dg_i(x_0)$

**Définition 2.7** Sous les hypothèses précédentes, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

**Application 2.8** Avec $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 \dots x_n$ et $T := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = s\}$ où $s > 0$, on obtient : $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.